MA2 – „písemná" přednáška 18.5.2020

Nekonečné řady

Nekonečnou číselnou řadou nazýváme symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost (nekonečná) reálných čísel –
– už ze středoškolské matematiky se setkáváme se symbolem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, který se nazývá geometrická řada ($q \in R$) a tvrdí se, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \iff |q|<1 ;$$

V matematice A1, když jsme se seznámili s Taylorovým polynomem funkce, která má v bodě $a \in D_f$ $f^{(n)}(a) \in R$, jsme mohli pro funkci, mající v bodě $a \in D_f$ derivace všech řádů, definovat symbol $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ – nazvali jsme tento symbol Taylorovou řadou funkce f, a ukázali jsme, že pro všechna $x \in R$ platí

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!})$$

tedy „užitečný" je i symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$, kde funkce $f(x)$ jsou definovány na množině $D \subset R$, $n=1,2\ldots$ – nekonečná řada funkcí.
Nejprve si vysvětleme (možná zopakujme), co symbolem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, nebo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, rozumíme.

Je-li dána nekonečná posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak definujeme posloupnost t.zv. částečných součtů $\{S_N\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ a „nekonečný součet" $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ chápeme jako limitu posloupnosti $\{S_N\}$ pro $N \to \infty$, pokud posloupnost $\{S_N\}$ limitu má.

Definice: Existuje-li $\lim_{N\to\infty} S_N = S \in R$, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a S nazýváme součtem této nekonečné řady, a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

V ostatních případech, tj. když $\lim_{N\to\infty} S_N = \pm\infty$, nebo, když posloupnost $\{S_N\}$ nemá limitu, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (k $\pm\infty$, nebo osciluje)

Příklady:

1. Geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$ konverguje právě když $|q| < 1$. (zde klademe $q^0 = 1$ pro lib. q)

Dk. Indukcí lze dokázat, že pro

$$q \neq 1 \text{ je } S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}, \text{ pro } q = 1 \text{ je } S_N = N + 1$$

$$\left(S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n \right)$$

a už v MA1 jsme ukázali, že pro $|q| < 1$ je $\lim_{N\to\infty} q^N = 0$, pro $q > 1$ je $\lim_{N\to\infty} q^N = +\infty$, a pro $q \leq -1$ posloupnost $\{q^N\}_{N=1}^{\infty}$ limitu nemá, tedy, je-li $q=1$, je $\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty}(N+1) = +\infty$, řada tedy diverguje, stejně i $\lim_{N\to\infty} s_N = +\infty$, je-li $q>1$, pro $q \leqq -1$ $\{q^{N+1}\}_{N=0}^{\infty}$ nemá limitu, tedy ani neexistuje limita posloupnosti $\{s_N\}_1^{\infty}$;

ale pro $|q|<1$ je $\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$,

neboť (jak již bylo uvedeno) je $\lim_{N\to\infty} q^{N+1} = 0$.

Poznámka: rovnost $s_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q^N}$ pro $q \neq 1$, $q \neq 0$ lze ukázat i tímto „trikem":

$$s_N = 1 + q + q^2 + \dots + q^N \quad | \cdot q \ (\neq 0,1)$$
$$s_N \cdot q = \quad q + q^2 + \dots + q^N + q^{N+1}$$

a odtud: $s_N(1-q) = 1 - q^{N+1} \Rightarrow s_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$, je-li $q \neq 1$

2. Vezměme reálné číslo $a = 0{,}a_1a_2a_3\dots a_n\dots$ vyjádřené jako nekonečný desetinný rozvoj, $0 \leq a_i \leq 9$, $a_i \in N$, $i=1,2\dots$;

číslo a lze chápat jako $a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, kde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ je konvergentní nekonečná řada: zde $s_N = 0{,}a_1a_2\dots a_N$ a dokažme, že

$$0 \leq |a - s_N| = |0{,}\underbrace{00\dots0}_{N}a_{N+1}a_{N+2}\dots| \leqq \frac{1}{10^N},$$

a $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{10^N} = 0$, tedy dostáváme (dle věty o strážnících),

že $\lim_{N\to\infty} |s_N - a| = 0$, tedy i $\lim_{N\to\infty}(s_N - a) = 0$, tedy

$\lim_{N\to\infty} s_N = a$, což jsme chtěli „ukázat".

(Důkaz, že $\lim_{N\to\infty} s_N = a$ lze provést i užitím definice limity posloupnosti (pokud bychom si chtěli tuto definici připomenout):

$\lim_{N\to\infty} s_N = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N_0\ \forall N > N_0 : |s_N - a| < \varepsilon$;

a když máme odhad $|s_N - a| < \frac{1}{10^N}$, stačí k danému $\varepsilon > 0$ najít takové N_0, že $\frac{1}{10^N} < \varepsilon$ pro všechna $N > N_0$;

$\frac{1}{10^N} < \varepsilon \iff 10^N > \frac{1}{\varepsilon} \iff N > \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ $\left(\frac{1}{\varepsilon} > 0\right)$,

tedy, zvolíme-li $N_0 > \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, pak pro $N > N_0$ je

$\frac{1}{10^N} < \frac{1}{10^{N_0}} < \varepsilon$, a tedy i $|s_N - a| < \frac{1}{10^N} < \varepsilon$, což

jsme měli ukázat.)

3. <u>Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$</u>, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nekonečná posloupnost reálných čísel (tato řada se někdy nazývá řada teleskopická)

Vyjádřeme částečný součet s_N:

$$s_N = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{N+1} - a_N) = a_{N+1} - a_1;$$

potom, když existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ($\in \mathbb{R}$ nebo i $\pm\infty$), je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{N\to\infty} (a_{N+1} - a_1) = L - a_1, \text{ je-li } L \in \mathbb{R}, \quad (*)$$

a $+\infty$ (resp. $-\infty$), pokud $\lim a_n = +\infty$ ($-\infty$).

Tedy, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ konverguje, kdyz $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in R$, jinak diverguje.

A odtud dostaneme:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$:

je $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right), \quad a_n = \frac{1}{n},$$

a protože $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, je $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right) = 0-1$, (dle (*))

tedy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1)-\ln(n))$, zde tedy $a_n = \ln n$,

a $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, tedy daná řada je řada divergentní (také se říká, že $\sum_{1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ diverguje)

V předchozích příkladech se nám „podařilo" rozhodnout o konvergenci, případně divergenci dané řady, ale jak zjistit, že řada konverguje či diverguje, třeba když máme řady takového:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \text{nebo} \quad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}, \quad \text{nebo} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},$$

u řad funkcí třeba $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ nebo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$?

Definice nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ asi připomíná i definici nevlastního integrálu $\int_a^{\infty} f(x)dx$:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \quad !$$

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ je konvergentní, ledy[?] $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \in R$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, ledy[?] $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \in R$

Částečný součet $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ je analogie integrálu $\int_a^b f(x)dx$, $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ jsme někdy uměli „spočítat" – $\int_a^b f(x)dx$ bylo možné vyjádřit a limitu $\lim_{b\to\infty} (F(b)-F(a))$ též, někdy jsme ale využili např. t.zv. srovnávací kritéria konvergence integrálu, nebo absolutní konvergenci integrálu, u řad tedy asi budeme postupovat podobně – jen částečný součet až na výjimky nedovedeme upravit tak, abychom pak limitu mohli přímo „spočítat" jako limitu dané posloupnosti (částečné součty jsme určili v předchozích příkladech vyšetření konvergence – u řady geometrické a teleskopické), a určit tak „přímo", zda řada konverguje, či diverguje – tedy zde u nekonečných řad budou „vládnout" kritéria konvergence řad (některá jednodušší si uvedeme). Ale i to má smysl, ukázat, zda řada je konvergentní, nebo zda diverguje – pokud řada konverguje, můžeme (dle smyslu limity) součet řady aproximovat s požadovanou chybou dosti „dlouhými" částečnými součty, ale pokud řada diverguje, aproximace částečným součtem by znamenala nekonečně velkou chybu!

A obecně, teorie nekonečných řad je důležitá část matematické analýzy, řady se často užívají v mnoha aplikacích – třeba již zmíněné řady Taylorovy a nebo pak řady Fourierovy tvaru $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ pro vyjádření 2π-periodických funkcí, integrovatelných v $\langle -\pi, \pi \rangle$. Proto je „dobré" aspoň trochu se s nekonečnými řadami, a jejich vlastnostmi, seznámit. Probereme základní kritéria konvergence řad, ale dříve ještě shrneme „počítání" se řadami; tzv. „aritmetiku řad":

Věta:
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady, pak také konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$, $c \in \mathbb{R}$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{1}^{\infty} a_n + \sum_{1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{1}^{\infty} a_n .$$

Důkaz je asi zřejmý – dostane se z „aritmetiky limit":

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n \xrightarrow[N \to \infty]{} \sigma_1 + \sigma_2, \text{ kde}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma_2$$ (dle předpokladu věty řady konvergují)

analogicky se ukáže i druhé tvrzení.

A dále – kritéria konvergence řad:

(aneb, jak se dá „poznat", zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, či diverguje)

1. Nutná podmínka konvergence řady $\sum_{1}^{\infty} a_n$ – jak lze jednoduše „poznat", že řada diverguje:

Věta: Jestliže řada $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz (je jednoduchý):

je-li $\{S_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{1}^{\infty} a_n$, pak n-tý člen řady $a_n = S_n - S_{n-1}$; a je-li $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ($S = \sum_{1}^{\infty} a_n$), je i $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ ($\{S_{n-1}\}_{n=2}^{\infty}$ je opět posloupnost částečných součtů řady $\sum_{1}^{\infty} a_n$), tedy, dle aritmetiky limit, je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Tedy, máme-li řadu $\sum_{1}^{\infty} a_n$, kde $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (buď limita $\{a_n\}$ je „jiná" nebo neexistuje), pak řada $\sum_{1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Př. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ diverguje, neboť $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

Ale pozor! Když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, neznamená to, že řada $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje – ukážeme si za chvilku, že řada $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (tzv. harmonická řada) diverguje, i když $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, a v příkladu 3 (ii) jsme si ukázali, že řada

$\sum_{1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ diverguje, ale opět, $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)}_{\to 1} = 0$.

1. Postačující podmínky konvergence řad – kritéria konvergence

A) Opět, jako u vyšetřování konvergence integrálu $\int_a^\infty f(x)\,dx$, začneme s podmínkami konvergence pro řady $\sum_1^\infty a_n$, kde $a_n \geqq 0$ $(n \in N)$ (analogicky i pro $\sum_1^\infty a_n$, kde $a_n \leqq 0$, $n \in N$), neboť posloupnost částečných součtů $\{S_n\}$ je u řady s členy nezápornými monotónní, neklesající a tedy vždy limita $\lim_{n\to\infty} S_n$ existuje. „Zbývá" pak už jen rozhodnout, zda tato limita je vlastní (pak řada konverguje), nebo nevlastní (řada je divergentní)

Věta: (srovnávací kritérium konvergence řad)

Nechť $0 \leqq a_n \leqq b_n$ pro všechna $n \in N$, a nechť konverguje řada $\sum_1^\infty b_n$. Pak konverguje i řada $\sum_1^\infty a_n$.

a ekvivalentní i kritérium „divergence":

Když diverguje $\sum_1^\infty a_n$, pak diverguje i řada $\sum_1^\infty b_n$.

Poznámka 1. Máme-li dánu řadu $\sum_1^\infty a_n$, pak konvergence, resp. divergence řady nezávisí na konečně mnoha členech řady, tak stačí, aby ve srovnávacím kritériu nerovnost $0 \leq a_n \leqq b_n$ platila jen pro $n \geqq n_0$, $n_0 \in N$; ale budeme psát, bez újmy na obecnosti, že dané podmínky (i u dalších kritérií) splňují všechny členy řad (pro jednoduchost).

Poznámka 2. Abychom mohli srovnávací kritérium využít pro vyšetřování řad, potřebujeme „zásobu" nekonečných řad, o kterých víme, zda konvergují či divergují, zatím máme jen řady geometrické a několik dalších příkladů – potřebujeme další „srovnávací" řady, a lépe pro srovnávání užitečnější jsou řady $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$, $p>0$ (pro $p \leqq 0$ řady divergují, neboť $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$). Vyšetření konvergence řad $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ bude bude provedeno v příkladech, zatím řekněme, že platí (důležité!)

$$\underline{\sum_1^\infty \frac{1}{n^p} \text{ konverguje} \iff p>1}$$

<u>Příklady užití srovnávacího kritéria:</u>

1. $\underline{\sum_1^\infty \frac{1}{n2^n}}$: $0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ pro $\forall n \in N$,

$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konverguje (geometrická řada, kde kvocient $q=\frac{1}{2}$) $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{n2^n}$ konverguje.

2. $\underline{\text{A co } \sum_1^\infty \frac{n}{2^n}\text{ ?}}$ – i když asi „cítíme", že opět i u této řady „vyhraje" geometrická řada $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}$,

(konvergence řady asi závisí na tom, jak „rychle" jdou členy řady k nule pro $n\to\infty$)

tak „srovnávací" kriterium nepomůže:

$\frac{n}{2^n} \geqq \frac{1}{2^n}$, a i když víme, že $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}$ konverguje, tak o řadě, jejíž členy jsou větší, nemůžeme říci „nic"!

Budeme tedy potřebovat asi kriteria „lepší" – viz dále.
(I u $\int_a^\infty f(x)dx$ jsme měli další, t.zv. limitní srovnání.)

3. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$: $0 \le \dfrac{1}{(n+1)^2} \le \dfrac{1}{n(n+1)}$ a víme, viz příklad 3(i), že $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje, tedy konverguje řada $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{(n+1)^2}$, tedy i řada $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ (viz poznámka)

$\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$: a protože pro $p>2$ je $0<\dfrac{1}{n^p}\le\dfrac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konverguje, tak konvergují (dle srovnávacího kritéria) i řady $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$, $p>2$.

Zbývá tedy pro vyšetření konvergence $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ vyšetřovat pro $p\in(0,2)$.

4. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{2n^2+1}$: $0<\dfrac{1}{2n^2+1}\le\dfrac{1}{2n^2}$,

$$\left.\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \text{ konverguje } \underset{\text{(aritmetika)}}{\Rightarrow} \sum_1^\infty \frac{1}{2n^2} \text{ konverguje}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{2n^2+1} \text{ konverguje.}$$

5. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{2n^2-1}$: zde (bohužel) je odhad obrácený – $\dfrac{1}{2n^2-1}\ge\dfrac{1}{2n^2}$, a tedy srovnávací kritérium nám „nepomůže", i když vidíme, že pro $n\to\infty$ je $\dfrac{1}{2n^2-1}\sim\dfrac{1}{2n^2}$ (opět srovnání s $\displaystyle\sum_1^\infty\frac{1}{2n^2}$), tedy, že daná řada bude („skoro jistě") řada konvergentní. Viz dále – „limitní srovnávací kritérium".

5. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$: $\frac{\sqrt{n}}{2n-1} \geq \frac{\sqrt{n}}{2n} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\left.\begin{array}{l} \\ \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverguje} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ diverguje} \end{array}\right\} \Rightarrow$

(bude ukázáno)

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$ je řada divergentní!

6. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$ – zde $\frac{\sqrt{n}}{2n+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, ale srovnávací

první srovnávacího kriteria „nic" říci o dané řadě – – řada menších členů může i konvergovat; i když zde opět „cítíme", že pro $n \to \infty$ je $\frac{\sqrt{n}}{2n+1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, tedy „nejspíše" bude daná řada divergovat.

Tedy, bude užitečná

<u>Věta – limitní srovnávací kriterium konvergence řad:</u>

Nechť $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ pro všechna $n \in N$. Pak platí:

a) je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{1}^{\infty} b_n$ (tj. $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{1}^{\infty} b_n$ konverguje)

b) je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, pak, když konverguje $\sum_{1}^{\infty} b_n$, konverguje i $\sum_{1}^{\infty} a_n$ (tj. $\sum_{1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje)

c) je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, pak z konvergence $\sum_{1}^{\infty} a_n$ plyne konvergence $\sum_{1}^{\infty} b_n$ (tj. $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} b_n$ konverguje)

Nejprve několik příkladů, naznačení důkazů srovnávacích kriterií až poté – „sepíšu" je v dodatku k této přednášce.

<u>Příklady užití limitního srovnávacího kriteria</u>

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n^2-1}$: $\frac{1}{2n^2-1} \sim \frac{1}{2n^2}$ pro $n \to \infty$, tedy

zvolme : $a_n = \frac{1}{2n^2-1} > 0$ a

$b_n = \frac{1}{n^2} > 0$; pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2-1} = \frac{1}{2},$$ a tedy,

protože $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n^2-1}$.
(dle limitního „srovnání")

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$: $\frac{\sqrt{n}}{2n+1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ pro $n \to \infty$, tedy zvolme

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (lze též $b_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$) ;

pak $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{2n+1}}{(\sqrt{n})^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2},$$ a tedy,

protože $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje, i $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$ diverguje (dle srovnávacího kriteria limitního)

3. $\sum_{2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4-1}$: $\frac{n^2}{n^4-1} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$, tedy lze zvolit

$a_n = \frac{n^2}{n^4-1}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^4-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4-1} = 1,$$ řada $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

konverguje, tedy též řada $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4-1}$ konverguje.

4. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$: víme, že e^x konverguje k „∞" rychleji než jakákoliv mocnina, vezmeme zde x^3, tj. pro posloupnosti členů řad:

$$a_n = \frac{n}{e^n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2} > 0, \quad \text{pak}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^n} = 0, \quad \text{a protože}$$

$$\left(\text{tato limita } \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} \underset{3\times \text{l'H.}}{=} 0\right)$$

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, konverguje i $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ (dokonce „lépe" – – dle limitního srovnávacího kritéria b))

Podobně bychom asi mohli ukázat i konvergenci řady $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, (zde se jen e^n „změní" na 2^n, ale 2^x opět konverguje k ∞ rychleji než x^3, a „dopadne" to stejně jako u řady $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$)
Obě řady jsou vlastně srovnatelné asi i s řadou geometrickou, konvergují spíše jako řady $\sum\limits_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ nebo $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, a že konvergují „lépe" než řady $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (a i $\sum \frac{1}{n^p}$ pro $p>2$ lze ukázat podobně) je vidět z toho, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, pamatujme si jistě, že když limita typu „$\frac{0}{0}$" vyjde 0, tak čitatel je „řádově" menší než jmenovatel.

A uvedeme dvě velmi „šikovná" kritéria konvergence řad, která lze použít pro vyšetření konvergence řad, u kterých se „zdá", že jsou hodně „podobné" řadám geometrickým.

Věta – (Cauchyho) limitní odmocninové kritérium

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \geq 0$, a nechť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Pak, je-li $0 \leq a < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

je-li $a > 1$, řada $\sum_1^{\infty} a_n$ diverguje.

Poznámka 1. Je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, kritérium „nic neříká", řada může konvergovat, může i divergovat.

Poznámka 2. Jak můžeme „rozumět" tomuto kritériu?

Máme-li řadu geometrickou $\sum_0^{\infty} q^n$, pak $\sqrt[n]{q^n} = q$ $(a_n = q^n)$, a víme, že pro $0 < q < 1$ řada konverguje, pro $q > 1$ diverguje.

A máme-li řadu $\sum_1^{\infty} a_n$, a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, tedy $\sqrt[n]{a_n}$ je „blízko" a, pak prvek řady a_n je „blízko" a^n, a tedy pak pro $\underline{a < 1}$ bude $\sum_1^{\infty} a^n$ konvergovat (bude to řada „blízká" geometrické řadě s $q = a < 1$), a pro $\underline{a > 1}$ bude $\sum_1^{\infty} a_n$ divergovat (podobné řadě geometrické s $q = a > 1$). A je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, pak členy řady jsou „blízko" 1, mohou být i větší i menší než 1, kromě nic „neříká".

Tato poznámka není důkazem Cauchyho kritéria, důkaz bude též v dodatku k dnešní přednášce, ale je to jen návod k tomu, jak bychom mohli tomuto kritériu rozumět.

A pro geometrickou řadu s $q > 0$ ještě platí $(a_n = q^n)$, že podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q$, a toto vede k dalšímu užitečnému kritériu:

Věta – (D'Alambertovo) limitní podílové kritérium

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n > 0$ pro $n \in N$, a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. Pak, je-li $0 \le a < 1$, řada $\sum_1^{\infty} a_n$ konverguje, a je-li $a > 1$, $\sum_1^{\infty} a_n$ je řada divergentní.

Poznámka 1. Opět platí, že je-li $a = 1$, o konvergenci nelze „nic říci".

Poznámka 2. „Výklad" Cauchyho limitního kritéria snad pomůže „vidět" i jak funguje (a proč) kritérium podílové.

Příklady užití Cauchyho a D'Alambertova kritéria:

1. $\sum_1^{\infty} \frac{n}{2^n}$: zde $a_n = \frac{n}{2^n}$, a užijeme zde $(a_n > 0)$ D'alambertovo podílové kritérium: (zpravidla k „výpočtu" lepší než počítat s odmocninami)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1,$$

tedy (dle D'Alambertova kritéria) $\sum_1^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konverguje.

Je to snazší vyšetření konvergence, než limitním srovnáním (viz dále).

Pro Cauchyho kritérium potřebujeme „vědět", že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, pak:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{(opět)}$$

(limity jsou stejné pro $\lim \sqrt[n]{a_n}$ i $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, srovnáváme se stejnou geometrickou řadou $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}$, $k \in N$ – opět (analogické vyšetření) je řada konvergentní pro kt. $k \in N$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a>0$: zde $a_n = \frac{a^n}{n!}$, „kvůli" $n!$ bude snazší použít kritéria podílového:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1}{n+1} = 0,$$

tedy daná řada konverguje pro všechna $a>0$.

(tedy i platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, a odtud, pro $a>1$, plyne, že „exponenciela a^n" jde „pomaleji" k ∞ než $n!$!)

4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$,

a zde je tedy příklad toho, že je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, nic o řadě $\sum_{1}^{\infty} a_n$ nemůžeme říci, jedna řada diverguje – $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$, zatímco ta druhá, $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ je řada konvergentní ($a_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$, $n = 2, 3, \dots$),

neboť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = „\frac{1}{\infty}" = 0$ (Cauchyho kriterium)

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ konverguje, neboť (Cauchyho kritérium)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

(tj. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ je „podobná" řadě $\sum_1^{\infty}\frac{1}{2^n}$ – a to je

zde, v tomto příkladu, docela dobře „vidět" –

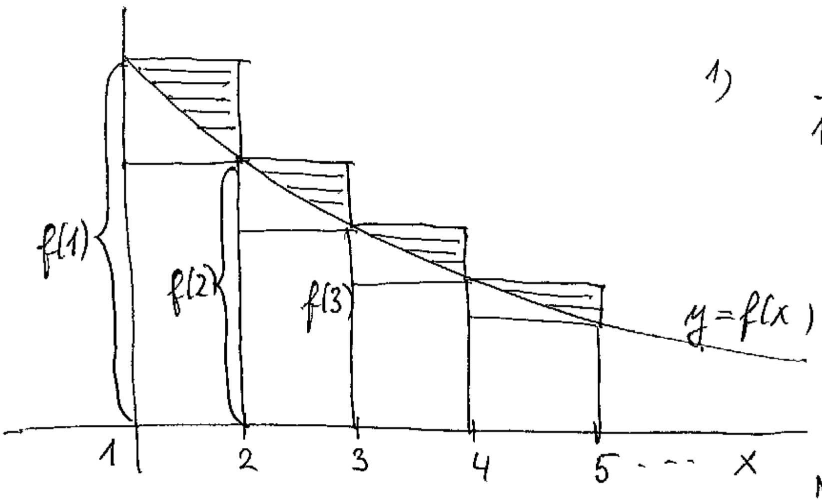
– $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$!)

Už umíme „dost" kritérií, ale stále ještě chybí nástroj na důkaz („spíše vysvětlení") konvergence řady $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^p}$ pro $p>1$ (a její divergence pro $0<p\leq 1$). Poslouží nám t.zv. integrální kritérium, které dává velice „pěkně" do souvislosti pojmy $\int_a^{\infty}f(x)dx$ a $\sum_1^{\infty}a_n$, a ukazuje jejich „příbuznost";

Věta (integrální kritérium konvergence řad) (Euler 1736)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle 1,+\infty)$, a nechť je f na $\langle 1,+\infty)$ nerostoucí a nezáporná. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ konverguje právě tehdy, konverguje $\int_1^{\infty}f(x)dx$.

Důkaz dělat nebudeme, zájemci mohou důkaz najít v mnohé literatuře, ale kritérium integrální je „vidět" na obrázku:



1) $\int_1^N f(x)\,dx$ vyjadřuje velikost plochy mezi grafem f a osou x v intervalu $\langle 1, N\rangle$

2) $\sum_{n=1}^{N} f(n)\cdot 1$ – vyjadřuje velikost plochy sjednocení obdélníčků o základně $\langle n, n+1\rangle$ a výšce $f(n)$;

3) $\sum_{n=2}^{N} f(n)\cdot 1$ – vyjadřuje velikost plochy sjednocení obdélníčků o základně $\langle n-1, n\rangle$ a výšce $f(n)$;

Tedy platí: $$\sum_{n=2}^{N} f(n) \underset{(2)}{\leq} \int_1^N f(x)\,dx \underset{(1)}{\leq} \sum_{n=1}^{N} f(n). \qquad (*)$$

Částečné součty řady $\sum_1^\infty f(n)$ tvoří neklesající posloupnost, i $\left\{\int_1^N f(x)\,dx\right\}$ je neklesající posloupnost, tedy existují limity (všechny) ve (*) a platí:

$\sum_1^\infty f(n)$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konverguje (z (1))

a $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum_1^\infty f(n)$ konverguje (z (2)),

tedy platí ekvivalence $\sum_1^\infty f(n)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konverguje.

A příklad – vyšetření konvergence $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p>0$:

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ je spojitá, kladná a klesající v $\langle 1, +\infty)$

(tedy splňuje předpoklady integrálního kritéria),

a tedy $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ konverguje;

a $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \left[\frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}} \right]_1^{\infty} \in \mathbb{R}$ (tj. konverguje) $\Leftrightarrow$ $p>1$,

(a to bylo uvedeno v příkladech dříve),

tedy : $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverguje, je-li $p \leq 1$ a konverguje pro $p>1$

A ještě příklad:

$\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverguje, neboť ($f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ je v $\langle 2, +\infty)$ klesající, spojitá a kladná)

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{array} \right| = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln t \Big]_{\ln 2}^{\infty} = \infty ,$$

tj. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx$ diverguje;

ale $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ konverguje, neboť $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx$ konverguje:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{\ln 2} \in \mathbb{R}$$

B) Konvergence řad s „libovolnými" členy (stručně)

1. Absolutní konvergence řady
(platí opět analogie k vlastnostem $\int_a^\infty f(x)dx$)

Věta (o absolutní konvergenci řady)
Mějme řadu $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Potom, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$, konverguje i řada $\sum_1^\infty a_n$.
(tj. $\sum_1^\infty |a_n|$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum_1^\infty a_n$ konverguje)

a „názvosloví":
(i) jestliže konverguje řada $\sum_1^\infty |a_n|$, říkáme, že řada $\sum_1^\infty a_n$ konverguje absolutně ;
(ii) jestliže řada $\sum_1^\infty a_n$ konverguje, ale $\sum_1^\infty |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_1^\infty a_n$ konverguje neabsolutně.

Důkaz věty: analogie k absolutní konvergenci $\int_1^\infty f(x)dx$:
definujeme $a_n^+ = \max(a_n, 0)$, $a_n^- = \max(-a_n, 0)$; pak
$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, $a_n = a_n^+ - a_n^-$, a platí
$0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$, $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$, tedy (srovnávací kritérium),
konverguje-li řada $\sum_1^\infty |a_n|$, konvergují i řady $\sum_1^\infty a_n^+$ i $\sum_1^\infty a_n^-$,
a pak tedy řada $\sum_1^\infty a_n = \sum_1^\infty (a_n^+ - a_n^-) = \underbrace{\sum_1^\infty a_n^+ - \sum_1^\infty a_n^-}_{\text{(aritmetika)}} \in R$,
tedy, $\sum_1^\infty a_n$ je řada konvergentní.

a příklady absolutně konvergentních řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$: $\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}} \right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ je konvergentní řada, tedy

$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$ konverguje absolutně.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$: 1) pro $x=0$ konverguje

2) pro $x>0$ bylo ukázáno (příklad na užití D'Alembertova podílového kriteria), že řada konverguje

3) zbývá vyšetření konvergence pro $x<0$!

$x<0$: $\sum_{0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \sum_{0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ konverguje (viz 2)), tedy

pro $x<0$ řada konverguje absolutně.

Tedy, $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je konvergentní řada pro každé $x \in R$, a my víme (z MA 1), že $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (Taylorova řada)

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ je absolutně konvergentní řada pro $\forall x \in R$:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right|$ konverguje pro lib. $x \in R$, neboť

$\forall n$: $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ a $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (užijeme srovnávací kriterium), tedy konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right|$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$: $\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje,

tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ jestli konvergovat může, neabsolutně,

a zatím tohle vyšetřit neumíme! Zatím jen (trochu) zvládáme vyšetřit konvergenci řad se členy, které nemění znaménko; a opravdu, řada $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje - - ukážeme si to (a pak tohle „zobecníme" a vyslovíme „naše" poslední kritérium konvergence pro t. zv. řady „alternující", jejichž členy pravidelně mění znaménko - - pro řady $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, kde $a_n \geqq 0$.

Tedy, „okoukejme" řadu $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$:

Vezměme nejprve posloupnost „sudých" částečných součtů:

(i) $S_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} =$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)}_{>0} > 0$$

a také

(ii) $S_{2k} = 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)}_{>0} - \dots - \underbrace{\left(\frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k-1}\right)}_{>0} - \frac{1}{2k} < 1$

(iii) $\{S_{2k}\}$ je rostoucí (je vidět z (i))

Jedy, $\{S_{2k}\}$ je rostoucí, shora omezená posloupnost, má tedy konečnou limitu - $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S$;

Vezměme nyní posloupnost $\{ s_{2k+1} \}$:

$$s_{2k+1} = s_{2k} + \frac{1}{2k+1} \; , \; \lim_{k\to\infty} s_{2k} = s \; , \; \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (dle aritmetiky limit) $\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = s$ (také)!

Tedy (snad je to zřejmé, že) když $\lim_{k\to\infty} s_{2k} = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = s$, že i $\lim_{k\to\infty} s_k = s$, tedy řada $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje, a to tedy neabsolutně.

<u>A nyní to očekávané „zobecnění"</u> – známé a užitečné kritérium konvergence alternujících řad (důkaz lze udělat úplně „stejně", jako jsme ukázali konvergenci řady $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$):

<u>Věta (kritérium Leibnizovo)</u> (kritérium neabsolutní konvergence)

Mějme řadu $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} a_n$, kde $a_n \geq 0$, a nechť platí

(i) $\{a_n\}_1^\infty$ je nerostoucí posloupnost;

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pak $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n$ konverguje.

<u>Příklady:</u>

1. $\underline{\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}}$ – splňuje předpoklady Leibnizova kritéria:

(i) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_1^\infty$ je klesající posloupnost, $\frac{1}{n} > 0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2. $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$;

(i) řada konverguje pro $x = 0$

(ii) vyšetříme absolutní konvergenci řady, tj. řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}, x \neq 0$:

je-li $|x| \neq 1$, je tato řada „podobná" řadě geometrické, užijeme tedy podílové limitní kritérium (D'Alembertovo) pro řady s kladnými členy: $\left(a_n = \frac{|x|^n}{n} \right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} |x| \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} = |x|,$$ tedy:

(a) pro $|x| < 1$ řada $\sum\limits_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right|$ konverguje, tedy řada $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ konverguje absolutně

(b) pro $|x| > 1$ řada absolutních hodnot diverguje, obecně nemůžeme nic „soudit" o konvergenci či divergenci řady samotné, ale při užití D'Alembertova kritéria pro $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ můžeme ukázat, že i $\sum a_n$ diverguje –
z kritéria totiž plyne, že když $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, a tedy i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy diverguje i řada $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$, v našem příkladu tedy
pro $|x| > 1$ řada $\sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ diverguje.

(c) zbývá vyšetřit konvergenci řady pro $|x| = 1$, tj. pro
$x = 1$: $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ – konverguje neabsolutně
a $x = -1$: $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = \sum\limits_{1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ diverguje.

Tedy závěr:

$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ konverguje absolutně pro $x \in (-1,1)$,

a neabsolutně pro $x=1$, jinak diverguje.

(A navíc lze ukázal, že $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$ v $(-1,1\rangle$,

tedy, $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.)

(Toto byl už trošku obtížnější příklad, ale snad i zajímavý.)

3. (poslední příklad této přednášky) $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$:

(opět):

(i) řada konverguje pro $x=0$

(ii) pro $|x| \neq 1$ vyšetříme absolutní konvergenci řady:

$\sum_{0}^{\infty}|a_n| = \sum_{0}^{\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$ a užitím D'Alambertova kriteria

máme: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{|x|^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}|x|^2\underbrace{\frac{2n+1}{2n+3}}_{\to 1} = |x|^2$,

tj. opět, řada konverguje absolutně v intervalu $(-1,1)$,

a diverguje pro $|x|>1$, tj. pro $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(stejná úvaha při užití D'Alambertova kriteria jako v minulém příkladu)

(iii) a zbývá vyšetřit řadu pro $|x|=1$, tj. pro $x=\pm 1$:

dostaneme řady $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ $(x=-1)$ a $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ $(x=1)$,

a ty konvergují neabsolutně (opět dle Leibnizova kriteria);

Ještě si toto kriterium zopakujme pro $x=1$ (třeba):

$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$ je řada alternující, $a_n = \frac{1}{2n+1}$, $\{a_n\}$ je

posloupnost klesající, $a_n > 0$, a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, tedy

(dle Leibnizova kriteria) řada $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konverguje

(ale neabsolutně, neboť $\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}$ diverguje – např. užijeme

integrální kriterium)

A poslední zajímavost – dá se ukázat, že v okolí, kde

řada $\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ konverguje, tj. pro $x \in \langle -1,1 \rangle$ platí:

$$\underline{\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x},$$

a odtud další zajímavost (zvolíme $x=1$)

$$\underline{\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}} \quad (= \operatorname{arctg} 1)$$

V poslední přednášce si ještě něco „řekneme" o funkčních řadách $\sum_1^\infty f_n(x)$ – několik příkladů (např. ty dva poslední) už o funkčních řadách „bylo".